ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 17 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΝΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΉΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και η $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

Α2. α. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια συνάρτηση ονομάζεται αρχική ή παράγουσα της f στο Δ;

β. Πότε ένα σημείο Α $x_0, f(x_0)$) ονομάζεται σημείο καμπής, μίας συνάρτησης παραγωγίσιμης σε ένα διάστημα (α,β);

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις επόμενες προτάσεις σαν σωστή (Σ) ή λανθασμένη(Λ)

i. Αν $f(x)>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ τότε υποχρεωτικά θα είναι και $\lim_{x\to 0} f(x)>1$.

ii. Η συνάρτηση $f(x)=ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$, έχει πάντα ένα σημείο καμπής.

iii. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

iv. Αν είναι α=β τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Α4. << Αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$ >>.

α. Να χαρακτηρίσετε σαν σωστή ή λανθασμένη την παραπάνω πρόταση.

β. Να δικαιολογήσετε την απάντηση του (α) ερωτήματος με τη βοήθεια κατάλληλου παραδείγματος.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση f με $f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

I. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

II. Να δείξετε ότι το μοναδικό σημείο καμπής της f είναι το O(0,0).

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

III. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$ και να δείξετε ότι η y=x-2 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

IV. Να γίνει πίνακας μεταβολών και με τη βοήθεια του, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

V. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου το οποίο περικλείεται, από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα xx'και τις ευθείες x=1 και x=2.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\geq 0\end{cases}$.

I. Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

II. Να δείξετε ότι για κάθε $x\geq 0$ ισχύει 2g(x+2)>g(x+3)+g(x+1).

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

III. Να βρείτε σημείο Μ της γραφικής παράστασης της g με τετμημένη μη αρνητική, το οποίο απέχει από το σημείο A($\frac{9}{2}$,0) τη μικρότερη απόσταση.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

IV. Αν Μ(4,2), βρείτε ευθεία η οποία διέρχεται από το Μ και η οποία χωρίζει το εμβαδό του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, με $x\geq 0$, τους άξονες xx', yy' και την ευθεία x=4 σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

V. Υλικό σημείο Ρ , με τετμημένη μικρότερη του μηδενός, κινείται στην γραφική παράσταση της g. Καθώς περνά από το σημείο Ν(-1,-1), η τετμημένη του μειώνεται με ρυθμό 2μ/sec.Να βρεθεί εκείνη τη χρονική στιγμή, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Ρ.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ για την οποία $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-1}{x}=1$.
Αν F αρχική της f στο R με $4[f(x)-F(x)]=e^{2x}$ για κάθε xεR
και για την συνάρτηση g ισχύει $e^{x}\left(g(x)+e^{x}\right)=4F(x)$ για κάθε xε $\mathbb{R}$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)$ είναι σταθερή και ότι είναι $f(x)=\frac{e^{2x}}{2}$, xεR

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii. α. Να δείξετε ότι είναι $f^{-1}(x)=\frac{ln2x}{2}, x>0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

β. Να προσδιορίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\left[f(x)+f^{-1}(x)\right]}{\eta\mu 2x+2x}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

iii. α. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A(1,f(1))

ΜΟΝΑΔΕΣ 1

β. Να λύσετε την εξίσωση $2f(e^{x}-x)+e^{2}=2e^{x+2}-2xe^{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

iv. Αν επιπλέον $h:(0,+\infty)\rightarrow R^{+}$ συνεχής για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι $f(h(2))>\frac{e^{4}}{2}$ και H αρχική της h για x>0 με H(1)=0

α. Να λύσετε την ανίσωση $f(H(x))>\frac{1}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(h(x))}{x-2}+\frac{H(-\sigma\upsilon\nu x)+1}{x-\pi}=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,\pi)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

(A)

A1 Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$. Αρκεί νδο $f(x_1) = f(x_2)$, $\forall x_1, x_2$

- Αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$
- Αν $x_1 \neq x_2$, τότε η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μ.Τ.Θ. στο $[x_1, x_2]$ (ή στο $[x_2, x_1]$) αφού είναι συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq \Delta$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2). Οπότε:

$$\exists \xi \in (x_1, x_2): \ f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \xrightarrow{f'(x)=0} f(x_1) = f(x_2)$$

Άρα, η f είναι σταθερή στο Δ.

A2 α) Αρχική ή παράγουσα της f στο Δ, ονομάζεται κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση F για την οποία ισχύει: $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \Delta$

β) Ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής μιας παραγωγίσιμης στο $(\alpha, \beta) \ni x_0$ συνάρτησης όταν η f είναι κοίλη στο (α, x_0) και κυρτή στο (x_0, β) ή αντιστρόφως

A3 i) Λ ii) Σ iii) Σ iv) Σ

A4 α) Λ

β) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \rightsquigarrow f \uparrow$

$f'(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$. $f'(0) = 0$

(B)

i) $f'(x) = 1 - 4\,\dfrac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = 1 - \dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^x = (e^x+1)^2 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

$\xrightarrow{f: \text{συνεχής}}$ $f \uparrow \mathbb{R}$

ii) $f''(x) = -4\,\dfrac{e^x(e^x+1)^2 - 2e^x(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4} = -4\,\dfrac{e^x(e^x+1) - 2e^{2x}}{(e^x+1)^3} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{4e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$, $x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$\xrightarrow{f: \text{συνεχής}} \begin{cases} f \cap (-\infty, 0] \\ f \cup [0, +\infty) \end{cases}$, Μοναδικό σημείο καμπής $O(0,0)$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+1}\right) = (-\infty)+2-0 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \underset{DLH.}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}\right) = 1-\frac{4\cdot 0}{(0+1)^2} = 1 = \lambda$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{4e^x}{e^x+1}\right) = 2-\frac{4\cdot 0}{0+1} = 2 = \beta$

$(\varepsilon_1): y = \lambda x+\beta \Rightarrow \underline{(\varepsilon_1): y = x+2}$: ασύμπτωτη στο $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4e^x}{e^x+1} \underset{DLH.}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4e^x}{e^x} = 4$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+1}\right) = (+\infty)+2-4 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \underset{DLH.}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}\right) = 1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4e^x}{(e^x+1)^2} \underset{DLH}{\overset{\infty/\infty}{=}}$

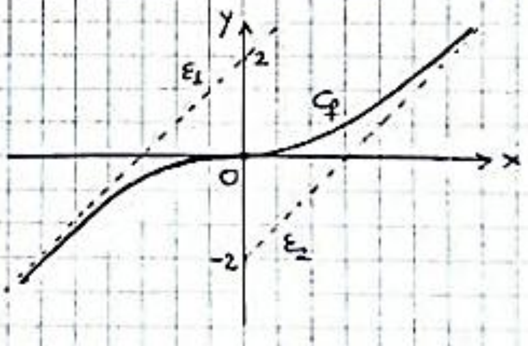
$= 1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4\cancel{e^x}}{2\cancel{e^x}(e^x+1)} = 1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1} \overset{u=e^x+1}{=} 1-\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{2}{u} = 1-\cancel{0} = \lambda'$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda' x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4e^x}{e^x+1}\right) = 2-4 = -2 = \beta'$

$(\varepsilon_2): y = \lambda' x+\beta' \Rightarrow \underline{(\varepsilon_2): y = x-2}$: ασύμπτωτη στο $+\infty$

iv)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			σ.κ.		



v) f: συνεχής και $f(x)>0,\ \forall\, x\in[1,2]$

$E = \int_1^2 |f(x)|\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+1}\right)dx = \int_1^2 x\,dx + 2\int_1^2 dx - 4\int_1^2\frac{e^x}{e^x+1}dx =$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 2\left[x\right]_1^2 - 4\left[\ln(e^x+1)\right]_1^2 \Rightarrow \underline{E = \left(4\ln\frac{e+1}{e^2+1}+\frac{7}{2}\right)\text{ τ.μ.}}$

(Γ)

i) $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0) = 0 \rightarrow g$ συνεχής

$$g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}, & x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x>0 \end{cases} \rightarrow g'(x)>0,\ \forall x \in \mathbb{R}^* \xrightarrow{g:\text{συνεχής}} g: \nearrow$$

$$g''(x) = \begin{cases} -\dfrac{(2\sqrt{-x})'}{(2\sqrt{-x})^2} = \dfrac{\sqrt{-x}}{4x^2}, & x<0 \\ -\dfrac{(2\sqrt{x})'}{(2\sqrt{x})^2} = -\dfrac{\sqrt{x}}{4x^2}, & x>0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} g''(x)>0, & \forall x<0 \\ g''(x)<0, & \forall x>0 \end{cases} \xrightarrow{g:\text{συνεχής}} \begin{cases} g \cup (-\infty, 0] \\ g \cap [0, +\infty) \\ \underline{\text{Σ.Κ.: } O(0,0)} \end{cases}$$

ii) $\forall x>0:\ 2g(x+2) > g(x+3) + g(x+1) \Leftrightarrow g(x+2) - g(x+1) > g(x+3) - g(x+2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{g(x+2)-g(x+1)}{(x+2)-(x+1)} > \frac{g(x+3)-g(x+2)}{(x+3)-(x+2)} \quad (1)$$

$g:$ συνεχής $[x+1, x+2]$ και παραγωγίσιμη $(x+1, x+2)$ $\xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} \exists\, \xi_1 \in (x+1, x+2):\ g'(\xi_1) = \dfrac{g(x+2)-g(x+1)}{(x+2)-(x+1)}$

Όμοια: $\exists\, \xi_2 \in (x+2, x+3):\ g'(\xi_2) = \dfrac{g(x+3)-g(x+2)}{(x+3)-(x+2)}$

$(1) \Leftrightarrow g'(\xi_1) > g'(\xi_2) \xLeftrightarrow{g' \searrow (0,+\infty)} \underline{\xi_1 < \xi_2}$, που ισχύει

iii) $M(x, \sqrt{x}),\ x \geq 0$

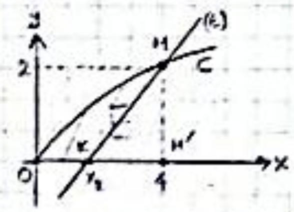
$(AM) = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - x\right)^2 + \left(0 - \sqrt{x}\right)^2} \Rightarrow (AM)(x) = \sqrt{x^2 - 9x + \frac{81}{4} + x} \Rightarrow$

$\Rightarrow (AM)(x) = \sqrt{x^2 - 8x + \frac{81}{4}},\ x \geq 0$

Το τριώνυμο $x^2 - 8x + \frac{81}{4}$ εμφανίζει ελάχιστο για $x = -\frac{-8}{2\cdot 1} = 4 \rightsquigarrow (AM)_{min} = AM(4)$

Άρα, $\underline{M(4, 2)}$

iv)



$E = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx = \int_0^4 x^{1/2}\, dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\sqrt{4^3} \rightarrow E = \frac{16}{3}$ τ.μ.

$(MKM') = \frac{E}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\cdot(4 - x_K)\cdot 2 = \frac{E}{\cancel{2}} \Leftrightarrow 8 - 2x_K = E \Leftrightarrow x_K = \frac{8-E}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_K = \frac{4}{3}$

$\lambda_\varepsilon = \lambda_{KM} = \frac{y_M - \cancel{y_K}}{x_M - x_K} = \frac{2}{4 - 4/3} \rightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{3}{4}$

$(\varepsilon): y - \cancel{y_K} = \lambda_\varepsilon(x - x_K) \rightarrow \underline{(\varepsilon): y = \frac{3}{4}x - 1}$

v) $y(x) = -\sqrt{-x}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{-x}}\cdot\frac{dx}{dt} \xrightarrow{x=-1\,m,\ \frac{dx}{dt}=-2\, m/sec} \frac{dy}{dt} = -1\ m/sec$$

Δ

i) $e^x g(x) + e^{2x} = 4F(x) \Leftrightarrow e^x g(x) + e^{2x} = 4f(x) - e^{2x} \Leftrightarrow g(x) = \frac{4f(x) - 2e^{2x}}{e^x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x) = \frac{4f(x)}{e^x} - 2e^x, \quad x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = \frac{4f'(x)\cancel{e^x} - 4f(x)\cancel{e^x}}{e^{2x}} - 2e^x \Rightarrow g'(x) = \frac{4(f'(x) - f(x))}{e^x} - 2e^x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$

$4[f(x) - F(x)] = e^{2x} \Rightarrow 4[f'(x) - f(x)] = 2e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$

$(1), (2) \Rightarrow g'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^x} - 2e^x = 0 \xrightarrow{g \text{ συνεχής}} \underline{g(x) = c, \ x \in \mathbb{R}}$

$e^x(g(x) + e^x) = 4F(x) \Leftrightarrow 4F(x) = e^{2x} + ce^x \Leftrightarrow 4F'(x) = 2e^{2x} + ce^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{2e^{2x} + ce^x}{4}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3)$

$t(x) = \frac{2f(x) - 1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x t(x) + 1}{2}$, κοντά στο 0 και $\lim_{x \to 0} t(x) = 1$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot t(x) + 1}{2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{f \text{ συνεχής}} f(0) = \frac{1}{2} \xRightarrow{(3)} c = 0$

$\therefore \ \underline{f(x) = \frac{e^{2x}}{2}, \ x \in \mathbb{R}}$

ii) α) $f'(x) = e^{2x} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{f \text{ συνεχής}} f \uparrow \mathbb{R} \Rightarrow f: 1-1 \rightsquigarrow \exists f^{-1}$

$f(\mathbb{R}) \overset{f \uparrow}{=} \left(\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = (0, +\infty) = D_{f^{-1}}$

$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και $y > 0 \quad (4)$

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{2x}}{2} = y \Leftrightarrow e^{2x} = 2y \xLeftrightarrow{y>0} 2x = \ln 2y \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2y}{2} \xRightarrow{(4)} f^{-1}(y) = \frac{\ln 2y}{2}, \ y > 0$

$\therefore \ \underline{f^{-1}(x) = \frac{\ln 2x}{2}, \ x > 0}$

β) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2[f(x) + f^{-1}(x)]}{\text{ημ}2x + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} + \ln 2x}{\text{ημ}2x + 2x} \overset{u = 2x}{=\!=} \lim_{u \to +\infty} \frac{e^u + \ln u}{\text{ημ}u + u} = \lim_{u \to +\infty} \frac{\frac{e^u}{u} + \frac{\ln u}{u}}{\frac{\text{ημ}u}{u} + 1} \quad (5)$

$\lim_{u \to +\infty} \frac{e^u}{u} \underset{DLH}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{u \to +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty, \quad \lim_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} \underset{DLH}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{u \to +\infty} \frac{1/u}{1} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\frac{\text{ημ}u}{u}\right| = \left|\frac{1}{u}\right| |\text{ημ}u| \le \left|\frac{1}{u}\right| \Leftrightarrow -\left|\frac{1}{u}\right| \le \frac{\text{ημ}u}{u} \le \left|\frac{1}{u}\right| \\ \lim_{u \to +\infty}\left(-\left|\frac{1}{u}\right|\right) = \lim_{u \to +\infty}\left|\frac{1}{u}\right| = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Κρ. Παρεμβολής}} \lim_{u \to +\infty} \frac{\text{ημ}u}{u} = 0$$

$(5) \to \lim_{x \to +\infty} \frac{2[f(x) + f^{-1}(x)]}{\text{ημ}2x + 2x} = \frac{(+\infty) + 0}{0 + 1} = \underline{+\infty}$

iii) α) $(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - \frac{e^2}{2} = e^2(x-1) \Leftrightarrow \underline{(\varepsilon): y = e^2 x - \frac{e^2}{2} = e^2\left(x - \frac{1}{2}\right)}$

β) $f''(x) = 2e^{2x} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{f \text{ συνεχής}} f$: κυρτή $\to C_f$ είναι πάνω από κάθε εφαπτομένη $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \geq e^2 x - \frac{e^2}{2} \Leftrightarrow 2f(x) \geq 2e^2 x - e^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$ ("=" για $x = 1$)

Θέτοντας όπου x το $e^x - x$: $2f(e^x - x) \geq 2e^2(e^x - x) - e^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f(e^x - x) \geq 2e^{x+2} - 2e^2 x - e^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$ ("=" για $e^x - x = 1$)

Πρέπει $e^x - x = 1 \Leftrightarrow e^x = x + 1$. Όμως, $e^x \geq x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ ("=" για $x = 0$).

Άρα, $\underline{x = 0}$.

iv) α) $h(x) = H'(x) > 0,\ \forall x > 0 \xrightarrow{H \text{ συνεχής}} H \nearrow (0, +\infty)$

$f(H(x)) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(H(x)) > f(0) \xLeftrightarrow{f\ 1-1} H(x) > 0 = H(1) \xLeftrightarrow{H\ 1-1} \underline{x > 1}.$

β) $\frac{f(h(x))}{x-2} + \frac{H(-\sigma\upsilon\nu x) + 1}{x - \pi} = 0 \Leftrightarrow (x-\pi) f(h(x)) + (x-2)[H(-\sigma\upsilon\nu x) + 1] = 0$.

$t(x) = (x-\pi) f(h(x)) + (x-2)[H(-\sigma\upsilon\nu x) + 1],\quad x \in [2, \pi]$

- t συνεχής ως πράξη συνεχών
- $t(2) = \underbrace{(2-\pi)}_{<0} \underbrace{f(h(2))}_{>0} < 0$
- $t(\pi) = (\pi-2)[H(-\sigma\upsilon\nu \pi) + 1] = (\pi-2)[H(1)+1] = \pi - 2 > 0$

$\Rightarrow t(2) \cdot t(\pi) < 0$

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, $\underline{\exists x_0 \in (2, \pi) : t(x_0) = 0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{f(h(x_0))}{x_0 - 2} + \frac{H(-\sigma\upsilon\nu x_0) + 1}{x_0 - \pi} = 0.$